SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. NEGRINI - V. SCORNAZZANI

RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ DELLE FUNZIONI SUPERARMONICHE E REGOLARITA' DEI PUNTI DI FRONTIERA PER UNA CLASSE DI OPERATORI ELLITTICO-PARABOLICI

15 MARZO 1984

In questo seminario esporremo alcuni risultati relativi ad una classe L di operatori differenziali del secondo ordine, a proposito delle seguenti questioni:

1) Rappresentazione "di Riesz", mediante la funzione di Green, delle funzioni L-superarmoniche, per un $L \in \mathcal{L}$.
2) Caratterizzazione, in termini dell'operatore L, delle funzioni L-superarmoniche.
3) Caratterizzazione dei punti regolari del bordo di un aperto di R^n per il problema di Dirichlet relativo all'operatore $L \in \mathcal{L}$.
4) Confronto della regolarità dei punti di frontiera di un operatore rispetto a due diversi operatori della classe $\mathcal{L}$.

Sia $\mathcal{L}$ la classe degli operatori della forma:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x).$$

tali che: (Ω_0 indica un opportuno aperto di R^n)

i) a_{ij}, b_i, $c \in C^\infty(\Omega_0, R)$ per ogni $i,j \in \{1,2...n\}$

ii) L è *non totalmente degenere* in ciascun punto di Ω_0, cioè, per ogni $x \in \Omega_0$ esistono $i, j \in \{1,2...n\}$ tali che $a_{ij}(x) \neq 0$

iii) L è *ellittico-parabolico* in Ω_0, cioè la matrice $A = \|a_{ij}\|$ è semidefinita positiva in ciascun punto di Ω_0

iv) L'algebra di Lie generata dai campi $X_0 = (b_1, b_2 ... b_n)$, e $X_k = (a_{k,1}, a_{k,2} ... a_{k,n})$ $(1 \leq k \leq n)$ ha rango n in ogni punto di Ω_0 (come è noto, questa condizione assicura che L è ipoellittico)

v) esistono θ, $\theta^* \in C^2(\Omega_0, R)$ tali che: $\theta, \theta^* > 0$ in Ω_0 ; $L\theta < 0$ in Ω_0 e, indicato con L^* l'aggiunto formale di L, $L^*\theta^* < 0$ in Ω_0.

Se $L \in \mathcal{L}$, Ω è un aperto contenuto in Ω_0 e $u \in C^\infty(\Omega)$, diciamo

che u è L-*armonica* in Ω ($u \in {}^L H(\Omega)$) se $Lu = 0$ in Ω.

Diremo che un aperto $\omega \subseteq \bar{\omega} \subseteq \Omega_0$ è *fortemente regolare* (FR) per L se per ogni $x \in \partial\omega$ esiste una normale esterna ν per ω, non caratteristica per L. Si dimostra ([2], teorema 5.2) che *ogni aperto* FR è *regolare per* L, ossia per ogni $f \in C(\omega)$ e $\phi \in C(\partial\omega)$, esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} Lu = -f & \text{in } \omega \\ u|_{\partial\omega} = \phi \end{cases}$$

Usando le tecniche di Bony ([2]) si può dimostrare che gli aperti FR costituiscono una base per Ω_0, e che per ogni ω aperto FR esiste una funzione $g: \omega \times \omega \to R \cup \{+\infty\}$, di classe C^∞ fuori dalla diagonale di $\omega \times \omega$ e ≥ 0, tale che, per ogni $f \in C(\bar{\omega})$, la soluzione del problema di Dirichlet (1) con $\phi = 0$ è data da:

$$u(x) = \int_\omega g(x,y)\, f(y)dy \qquad \text{per ogni} \quad x \in \omega\ ;$$

la g si chiama *funzione di Green* relativa a ω e L.

Se $\Omega \subseteq \Omega_0$ è un aperto, e $u: \Omega \to R\cup\{+\infty\}$ è una funzione inferiormente semicontinua (i.s.c., nel seguito), si dice che u è L-*iperarmonica* se per ogni aperto regolare $V \subseteq \bar{V} \subseteq \Omega$ risulta $\mu^V u \leq u$ in V ($\mu^V u$ è la funzione tale che $(\mu^V u)(x) = \int_{\partial V} u(\xi)d\mu_x^V(\xi)$ per ogni $x \in V$, essendo μ_x^V la misura L-armonica relativa a V nel punto $x \in V$; cioè μ_x^V è la misura tale che, per ogni $\phi \in C(\partial V)$, la soluzione del problema di Dirichlet $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } V \\ u|_{\partial V} = \phi \end{cases}$ è data, in ciascun punto $x \in V$, da: $u(x) = \int_{\partial V} \phi(\xi)d\mu_x^V(\xi)$; ad esempio, se L è il laplaciano e C è una sfera, μ_x^V è il nucleo di Poisson relativo al punto x).

Si dice che u è *superarmonica* in Ω ($u \in {}^L S(\Omega)$) se è iperarmo

nica, e per ogni aperto regolare $V \subseteq \bar{V} \subseteq \Omega$ risulta $\mu^V u \in {}^L H(V)$. Le ipotesi date sugli operatori della classe L permettono di dimostrare che le funzioni L-armoniche (per un $L \in L$) soddisfano l'*assioma di convergenza di Doob*: "se (u_p) è una successione non decrescente in ${}^L H(\Omega)$ e $u(x) \overset{def}{=} \sup_{p \in N} u_p(x)$ è finita in un sottoinsieme denso di Ω, allora $u \in H(\Omega)$".

Questa proprietà è provata in [2], facendo uso di una disuguaglianza di Harnack. Un risultato astratto di teoria del potenziale ([3], § 2.2) permette, in presenza dell'assioma di Doob, di caratterizzare le funzioni L-superarmoniche nel modo seguente:

$$u \in {}^L S(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ è iperarmonica in } \Omega, \text{ e} \\ u < +\infty \text{ in un sottoinsieme denso di } \Omega. \end{cases}$$

Le ipotesi date consentono di ottenere (cfr. [9]) una formula di rappresentazione di tipo Riesz per le funzioni superarmoniche sugli aperti FR, mediante la funzione di Green. Precisamente, valgono i seguenti teoremi:

Teorema 1. *Sia* $\Omega \subseteq \Omega_0$, Ω *aperto; sia* $\omega \subseteq \bar{\omega} \subseteq \Omega$, ω FR; *sia* g *la funzione di Green per* ω. *Per ogni* $u \in S(\Omega)$ *esistono e sono uniche* $h \in H(\omega)$ *e una misura di Borel positiva* μ, *su* ω, *tali che:*

$$u(x) = h(x) + \int_\omega g(x,y)\, d\mu(y) \tag{2}$$

per ogni $x \in \omega$.

Il teorema "di "Riesz" vale anche nella seguente versione "globale":

Teorema 2. *Sia* ω *un aperto* FR: *sia* $u \in S(\omega) \cap H(\omega - K)$, *con*

$K \subset\subset \omega$ (cioè, u è armonica fuori da un compatto $K \subseteq \omega$). *Allora esistono e sono uniche una misura finita* μ *con supporto* $\subseteq K$, *e* $h \in H(\omega)$ *tali che:*

$$(3) \qquad u(x) = h(x) + \int_\omega g(x,y)\, d\mu(y)$$

per ogni $x \in \omega$.

In particolare se u *è un potenziale su* ω (cioè, se la massima minorante armonica di u in ω è 0) *allora* (3) *vale con* $h = 0$.

Il teorema di rappresentazione consente di ottenere una caratterizzazione delle funzioni superarmoniche che estende il noto risultato per il quale, se $u \in C^2(\Omega)$, allora $u \in S(\Omega)$ se e solo se $Lu \leq 0$ in Ω.

Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 3. *Sia* $u : \Omega \to R \cup \{+\infty\}$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

a. $u \in S(\Omega)$ [ovvero, più precisamente: u coincide quasi dappertutto con una $v \in S(\Omega)$]

b. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* $Lu \leq 0$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$ cioè, $\int_\Omega u\, L^*\phi \leq 0 \;\; \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \phi \geq 0$

I teoremi 1, 2, 3 estendono alla classe L alcuni risultati di [6], in cui analoghe proprietà vengono dimostrate relativamente ad una classe di operatori ellittici degeneri della forma (4):

$$L_u = \sum_{i=1}^{r} X_i^2 u + Yu + a \cdot u\ , \quad \text{con } X_1 \ldots X_r,\ Y$$

operatori del 1° ordine a coefficienti C^∞, tali che l'algebra di Lie generata da $X_1, \ldots, X_r$ ha rango n in ogni punto del dominio di definizione. Questa classe non contiene, per esempio, tutti gli operatori parabolici, o parabolici degeneri, come l'operatore del calore e l'operatore di Kolmogorov $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}$, che invece rientrano nella classe L da noi considerata.

I teoremi 1 e 2, in particolare, contengono i teoremi di rappresentazione per l'operatore di Laplace, e per l'operatore del calore (cfr. Pini [10], Doob [4]) e per l'operatore di Kolmogorov (Scornazzani [11]).

Le tecniche da noi usate per dimostrare i teoremi 1, 2, 3 si basano sui metodi della teoria assiomatica del potenziale, e sono ispirate a quelle di [6]; tuttavia, non è sempre stata possibile la trasposizione al nostro caso più generale delle tecniche di [6]. Infatti, parecchi risultati di quest'ultimo articolo sono dimostrati basandosi sul fatto che gli operatori della forma (4) generano spazi armonici nei quali vale l'assioma di convergenza di Brelot (se una successione non decrescente di funzioni armoniche u_n è tale che in un punto x_o risulta $\sup_{n\in N} u_n(x_o) < +\infty$, allora $u = \sup_{n\in N} u_n$ è armonica). In concreto, questa proprietà corrisponde grossomodo a fare l'ipotesi che la misura L-armonica μ_x^V, essendo V un aperto regolare per L e $x \in V$, abbia per supporto tutta ∂V; e ciò non accade per certi operatori della classe L, come gli operatori del calore e di Kolmogorov.

PUNTI REGOLARI PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET

Sia $\Omega \subseteq R^n$ un aperto limitato tale che $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_o$; sia $L \in \mathcal{L}$ e $x_o \in \partial\Omega$. Diciamo che x_o è L-*regolare* per Ω se, per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$, la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet $\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases}$ è tale che:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_o} u(x) = \phi(x_o).$$

La formula di rappresentazione di Riesz permette di caratterizzare i punti L-regolari di $\partial\Omega$ con una condizione del tipo di quella data da De la Vallée-Poussin per il laplaciano. Questa caratterizzazione è stata estesa da Littman, Stampacchia e Weinberger [8] ad una ampia classe di operatori ellittici: in [9] noi dimostriamo un teorema dello stesso tipo, relativamente agli operatori della classe $\mathcal{L}$.

Sia $L \in \mathcal{L}$; sia X un aperto limitato tale che $\bar{X} \subseteq \Omega_o$; sia $A \subseteq X$ e $u \in \mathcal{S}^+(X)$ (cioè, $u \in \mathcal{S}(X)$ e $u \geq 0$). Poniamo:

$$(5) \qquad {}^X R_u^A \overset{\text{def}}{=} \inf\{v \in \mathcal{S}^+(X) \mid v \geq u \text{ in } A\};$$

indichiamo poi con ${}^X\hat{R}_u^A$ la "regolarizzata i.s.c." di ${}^X R_u^A$, cioè la più grande funzione i.s.c. minore o uguale di ${}^X R_u^A$. Si dimostra (cfr. [3]) che ${}^X\hat{R}_u^A \in \mathcal{S}(x) \cap \mathcal{H}(X-\bar{A})$.

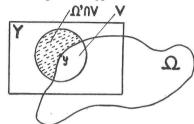
Se $F \subseteq X$ è un compatto, chiamiamo *potenziale di equilibrio* di F (relativamente a L e a X) la funzione ${}^X\hat{R}_1^F$. Ricordiamo che, se $A \subseteq X$, si dice che A è *polare* (relativamente allo spazio armonico generato da L su X) se esiste $f \in \mathcal{S}^+(X)$ tale che $A \subseteq f^{-1}(\{+\infty\})$. Per un insieme F compatto, risulta che F *è polare se e solo se* ${}^X\hat{R}_1^F \equiv 0$ *in* X.

Dopo queste premesse, possiamo enunciare il teorema che caratterizza i punti L-regolari:

Teorema 4. *Sia* Ω *un aperto tale che* $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_0$; *sia* $y \in \partial\Omega$. *Sia* Y *un intorno di* y *tale che* $\{y\}$ *sia polare, relativamente allo spazio armonico generato da* L *su* Y. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

a. y è L-*irregolare per* Ω

b. $\lim\limits_{v \in U_y} {}^{Y}\hat{R}_1^{\Omega' \cap Y}(y) = 0$

(U_y denota il filtro degli intorni compatti di y).

L'enunciato del teorema appare dipendente dalla scelta di Y; in effetti, le cose non stanno così: si dimostra infatti ([9], prop. 17 e 18) che:

1) *se* Z_1, Z_2 *sono aperti*, $\bar{Z}_i \leq \Omega_0$, *e* F compatto $\subseteq Z_1 \cap Z_2$, *allora* F *è polare relativamente a* Z_1 *se e solo se lo è relativamente a* Z_2

2) *se* $y \in Z_1 \cap Z_2$, *e* (F_n) *è una successione decrescente di compatti*, $F_n \subseteq Z_1 \cap Z_2$, *tali che* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{y\}$, *allora*

$$\lim_{n \to +\infty} {}^{Z_1}\hat{R}_1^{F_n}(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} {}^{Z_2}\hat{R}_1^{F_n}(y) = 0.$$

Dunque, la polarità di $\{y\}$ e la condizione b. del teorema 4 dipendono esclusivamente da y, e non dalla scelta di Y.

Rimane da stabilire se $\{y\}$ è o non è polare; questo problema è legato al comportamento di $g(x,y)$ al tendere di x a y, dove g è la funzione di Green di un aperto contenente y. Si può osservare che ci sono casi in cui $\{y\}$ non è polare: basta pensare al caso di $n = 1$, e $L = \frac{d^2}{dx^2}$; in questo caso, se y a,b $= Y$, ${}^{Y}\hat{R}_1^{\{y\}}$ ha il grafico rappresentato qui a fianco, e quindi $\{y\}$ non è polare.

Il teorema 4 e la formula di rappresentazione di Riesz permettono di spostare il problema del confronto dalla regolarità di un punto di frontiera rispetto a due operatori L e $M \in \mathcal{L}$ al confronto delle rispet

tive funzioni di Green; si ha infatti:

Proposizione 5. *Sia* X *un aperto,* $X \subseteq \bar{X} \subseteq \Omega_0$, X FR *rispetto ad entrambi gli operatori* L, M L. *Siano* g *e* γ *le funzioni di Green per* X, *relative a* L e M, *rispettivamente. Supponiamo che esista* $c > 0$ *tale che, per ogni* $(x,y) \in X \times X$ *risulti:*

$$\frac{1}{c}\; g(x,y) \;\leqq\; \gamma(x,y) \;\leqq\; cg(x,y)$$

Allora, per ogni compatto $F \subseteq X$, *e per ogni* $x \in X$ *risulta:*

$$\frac{1}{c^2}\; {}^{M}\hat{R}_1^F(x) \leqq {}^{L}\hat{R}_1^F(x) \leqq c^2\; {}^{M}\hat{R}_1^F(x)$$

(abbiamo indicato con ${}^{M}\hat{R}_1^F$ e ${}^{L}\hat{R}_1^F$ i potenziali di equilibrio del compatto F in X, relativi rispettivamente a M e L).

Dalla proposizione 5 e dal teorema 4, tenendo conto del fatto che un compatto F è L-polare (M-polare) in X se e solo se ${}^{L}\hat{R}_1^F \equiv 0$ (${}^{M}\hat{R}_1^F \equiv 0$) discendono immediatamente i seguenti due corollari:

Corollario 6. *Sia* $x \in X$. *Allora* $\{x\}$ *è* L-*polare (in* X) *se e solo se è* M-*polare.*

A causa di ciò, nel seguente corollario 7 diremo "$\{y\}$ è polare" intendendo che è tale sia rispetto a L, sia rispetto a M

Corollario 7. *Sia* $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq X$, *aperto. Sia* $y \in \partial\Omega$ *tale che* $\{y\}$ *è polare. Allora* y *è* L-*regolare per* Ω *se e solo se è* M-*regolare per* Ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BAUER: "Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie". Lecture Notes in Mathematics, 22, Springer-Verlag 1966.

[2] J.M. BONY: "Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du probléme de Cauchy pour les operateurs elliptiques dégénérés". Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19-1 (1969) 277-304.

[3] C. COSTANTINESCU, A. CORNEA: "Potential Theory on Harmonic Spaces". Springer-Verlag 1972.

[4] J.L. DOOB: "A probability approach to the heat equation". Trans. A.M.S. 80 (1955) 216-280.

[5] R.M. HERVE': "Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potential". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 12 (1962) 415-571.

[6] R.M. et M. HERVE': "Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associeés a un operateur elliptique dégénéré". Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22-2 (1972) 131-145.

[7] E. LANCONELLI: "Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore". Ann. di Mat. Pura e Appl., 97 (1973), 83-114.

[8] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA, H. WEINBERGER: "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients". Ann. S.N.S. Pisa, 17 (1963), 45-79.

[9] P. NEGRINI e V. SCORNAZZANI: "Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators". In corso di stampa sul suppl. C del Bollettino U.M.I.

[10] B. PINI: "Estensione al caso parabolico del teorema di F. Riesz relativo alle funzioni sub-armoniche". Rivista Mat. Univ. Parma 5 (1954) 269-280.

[11] V. SCORNAZZANI: "Sul problema di Dirichlet per l'operatore di Kolmogorov". Boll. U.M.I. 18-C, 1 (1981) 43-62.